Ακολουθίες στον $\mathbb{R}^n$.

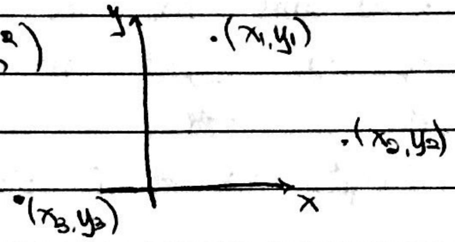
<u>Ορισμός</u>: Μια απεικόνιση

$$\mathbb{N} \ni \nu \longmapsto \bar{x}_\nu \in \mathbb{R}^n$$

ονομάζεται <u>ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$</u> και (ολόκληρη την ακολουθία, όχι τους <u>όρους</u> της $\bar{x}_\nu \in \mathbb{R}^n$) τη συμβολίζουμε με $(\bar{x}_\nu)$ [ή $(\bar{x}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$]
και για να είναι σαφές ότι πρόκειται για ακολουθία <u>στον $\mathbb{R}^n$</u> γράφουμε $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ [θεωρώντας το σύνολο τιμών της ακολουθίας $(\bar{x}_\nu)$ το οποίο είναι $\{\bar{x}_\nu : \nu\in\mathbb{N}\}$.]

[ο δείκτης $\nu\in\mathbb{N}$ χρησιμοποιείται επειδή με n συμβολίσαμε τη διάσταση του πεδίου τιμών $\mathbb{R}^n$]

<u>Γεωμετρικά</u> (πχ στον $\mathbb{R}^2$)



Ο κάθε όρος $\bar{x}_\nu \in \mathbb{R}^n$ έχει n συντεταγμένες, τις οποίες συμβολίζουμε με $x_\nu^{(i)}$, $i=1,\dots,n$, δηλ. μια ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ καθορίζεται σαφώς από τους όρους της $\bar{x}_\nu = (\underbrace{x_\nu^{(1)}}_{\in\mathbb{R}}, \dots, \underbrace{x_\nu^{(n)}}_{\in\mathbb{R}})$

[Εάν η ακολουθία είναι στον $\mathbb{R}^2$ γράφουμε και $(\underbrace{x_\nu}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{y_\nu}_{\in\mathbb{R}}) \in \mathbb{R}^2$ $\forall \nu\in\mathbb{N}$ και αντίστοιχα στον $\mathbb{R}^3$ $(x_\nu, y_\nu, z_\nu)\in\mathbb{R}^3$, $\nu\in\mathbb{N}$]

► Τι καταλαβαίνουμε όταν λέμε ότι οι όροι μιας ακολουθίας $\bar{x}_\nu\in\mathbb{R}^n$, $\nu\in\mathbb{N}$ «πλησιάζουν» ένα σημείο $\bar{x}_0\in\mathbb{R}^n$, όταν το $\nu\to\infty$;

<u>Ορισμός</u>: Μια ακολουθία $(\bar{x}_\nu)\subset\mathbb{R}^n$ <u>συγκλίνει στο σημείο $\bar{x}_0\in\mathbb{R}^n$</u>, όταν $\nu\to\infty$ αν $\underbrace{\text{(και μόνο αν)}}_{\text{σε ορισμούς παραλείπεται}}$ $\|\bar{x}_\nu-\bar{x}_0\|\to 0$ για $\nu\to\infty$.

Γράφουμε $\bar{x}_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \bar{x}_0$ ή απλούστερα ως συντομογραφία, $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ και το $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται όριο της ακολουθίας $(\bar{x}_\nu) \in \mathbb{R}^n$.

Αν υπάρχει ένα όριο $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, έτσι ώστε $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$, λέμε (γίνεται) ότι η ακολουθία $(\bar{x}_\nu)$ συγκλίνει.

Παραδείγματα: Οι ακολουθίες $(\frac{1}{\nu}, 0)$, $(0, \frac{1}{\nu^2})$, $(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu})$, $(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu^2})$, $(\sin(\frac{1}{\sqrt{\nu}}), e^{-\nu})$ συγκλίνουν όλες στο σημείο $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, αφού για όλες ισχύει

$$\|(x_\nu, y_\nu) - (0,0)\| = \|(x_\nu, y_\nu)\| = \sqrt{x_\nu^2 + y_\nu^2} \to 0 \iff x_\nu^2 + y_\nu^2 \to 0 \iff \|(x_\nu, y_\nu)\|^2 \to 0$$

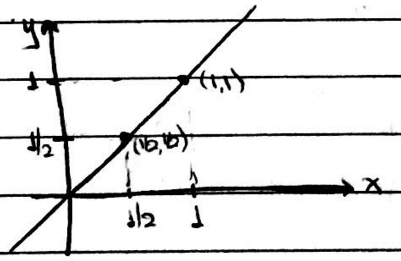
(Super SOS: Το ότι ισχύει ο πιο πάνω ισχυρισμός προκύπτει από το ότι ΙΔΕΑ) $\underbrace{x_\nu}_{\in\mathbb{R}} \to 0 \wedge \underbrace{y_\nu}_{\in\mathbb{R}} \to 0 \Rightarrow x_\nu^2 \to 0 \wedge y_\nu^2 \to 0 \Rightarrow 0 \le x_\nu^2 + y_\nu^2 \to 0$

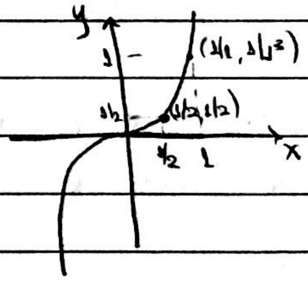
$\Rightarrow 0 \le x_\nu^2 \le x_\nu^2 + y_\nu^2 \to 0 \Rightarrow x_\nu^2 \to 0 \wedge$ (αντίστοιχα) $y_\nu^2 \to 0 \Rightarrow |x_\nu|^2 \to 0 \wedge |y_\nu|^2 \to 0$

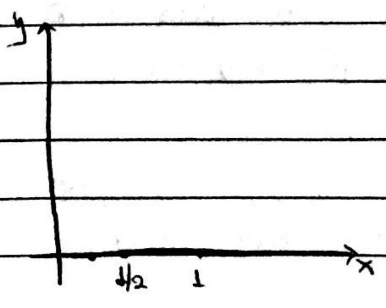
Θ. ισοσυγκλινουσών

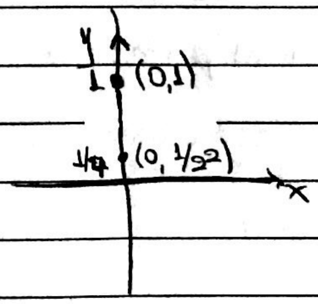
$\Rightarrow |x_\nu| \to 0 \wedge |y_\nu| \to 0 \Rightarrow x_\nu \to 0 \wedge y_\nu \to 0$ Με άλλα λόγια δείξαμε στον $\mathbb{R}^n$ ότι $(x_\nu, y_\nu) \to (0,0) \iff x_\nu \to 0 \wedge y_\nu \to 0$

(αν $a_\nu \ge 0$, $a_\nu \to a (\ge 0)$ τότε $\sqrt{a_\nu} \to \sqrt{a}$)

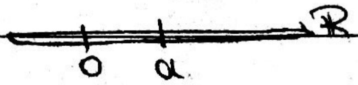








«Ηθικό» Δίδαγμα: Στον $\mathbb{R}^2$ (και γενικότερα στον $\mathbb{R}^n$) μια ακολουθία $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ μπορεί να συγκλίνει στο όριο $\bar{x}_0$ με πολλούς, περισσότερους τρόπους («δρόμους») από ότι στον $\mathbb{R}$, όπου η $\underbrace{a_\nu}_{\in\mathbb{R}} \to \underbrace{a}_{\in\mathbb{R}}$, κινούμενη πάνω στον $\mathbb{R}$.



Από τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθίας στον $\mathbb{R}^n$, $(\bar{x}_\nu)\subset\mathbb{R}^n$, σε ένα όριο $\bar{x}_0$ στο $\mathbb{R}^n$, $\underbrace{\|\bar{x}_\nu-\bar{x}_0\|\to 0}_{\text{δηλ. } \bar{x}_\nu\to\bar{x}_0}$. Επίσης $\|\bar{x}_\nu-\bar{x}_0\|\to 0 \iff \|(\bar{x}_\nu-\bar{x}_0-\bar{0})\|\to 0$

$\iff \bar{x}_\nu-\bar{x}_0\to\bar{0}$

Δηλαδή $\bar{x}_\nu\to\bar{x}_0 \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\nu_0\in\mathbb{N}\ \forall\nu\geq\nu_0 : \underbrace{\|\bar{x}_\nu-\bar{x}_0\|<\varepsilon}_{\iff \bar{x}_\nu\in B(\bar{x}_0,\varepsilon)}$

Από αυτό προκύπτουν, άμεσα, τα εξής δύο αποτελέσματα

Πρόταση 1.4.1: Το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας στον $\mathbb{R}^n$ είναι μοναδικό και συμβολίζεται με $\lim\limits_{\nu\to\infty}\bar{x}_\nu=\bar{x}_0 \iff \bar{x}_\nu\to\bar{x}_0$.

[Απόδειξη: Άσκηση (σημ.) όπως στον $\mathbb{R}$].

Πρόταση 1.4.2: Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ είναι φραγμένη.

$[\bar{x}_\nu\to\bar{x}_0 \Rightarrow \exists\nu_0\in\mathbb{N}\ \forall\nu\geq\nu_0 : \|\bar{x}_\nu-\bar{x}_0\|<1 \Rightarrow \big|\|\bar{x}_\nu\|-\|\bar{x}_0\|\big|<1$

$\Rightarrow \|\bar{x}_\nu\|\leq\|\bar{x}_0\|+1 \Rightarrow \forall\nu\in\mathbb{N}\ \|\bar{x}\|\leq\underbrace{\max\{\|\bar{x}_1\|,\ldots,\|\bar{x}_{\nu_0-1}\|,\|\bar{x}_0\|+1\}}_{=:R>0}]$

$\Updownarrow$

$\underbrace{(\bar{x}_\nu)\subset\mathbb{R}^n \text{ φραγμένη}}$ αν υπάρχει τέτοιο $R>0$

$\iff \exists R>0\ \forall\nu\in\mathbb{N}\ \bar{x}_\nu\in B(0,R)$

$\bar{x}_\nu\to\bar{x}_0,\ \bar{y}_\nu\to\bar{y}_0$ στον $\mathbb{R}^n$

$a_\nu\to a,\ b_\nu\to b$ στον $\mathbb{R}$

$\Rightarrow a_\nu\bar{x}_\nu+b_\nu\bar{y}_\nu\to a\bar{x}_0+b\bar{y}_0$ [Απόδειξη: Άσκηση με λύση εδώ].

Θ.ν.δ.ο. $0\leq\|a_\nu\cdot\bar{x}_\nu+b_\nu\bar{y}_\nu-(a\bar{x}_0+b\bar{y}_0)\|\xrightarrow[\nu\to\infty]{}0$

Κεντρική ιδέα (αν δυσκολεύει) Θεώρημα ισοσυγκλινουσών στον $\mathbb{R}$ (Παρεμβολής)

$\|a_\nu \bar{x}_\nu + b_\nu \bar{y}_\nu - (a\bar{x}_0 + b\bar{y}_0)\|$

$= \|a_\nu(\bar{x}_\nu - \bar{x}_0) + (a_\nu - a)\bar{x}_0 + b_\nu(\bar{y}_\nu - \bar{y}_0) + (b_\nu - b)\bar{y}_0\|$

$\le \underbrace{\|a_\nu(\bar{x}_\nu - \bar{x}_0)\|}_{=|a_\nu|\underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|}_{\to 0}} + \underbrace{\|(a_\nu - a)\bar{x}_0\|}_{=\underbrace{|a_\nu - a|}_{\to 0}\|\bar{x}_0\| \to 0} + \underbrace{\|b_\nu(\bar{y}_\nu - \bar{y}_0)\|}_{=|b_\nu|\|\bar{y}_\nu - \bar{y}_0\|} + \underbrace{\|(b_\nu - b)\bar{y}_0\|}_{=\underbrace{|b_\nu - b|\|\bar{y}_0\|}_{\to 0}}$

Ομογ. ανισ.

$|a_\nu|\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|$
$= |a_\nu - a + a|$
$\le |a_\nu - a| + |a|$
$\le \underbrace{|a_\nu - a|}_{\to 0}\underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|}_{\to 0}$
$+ |a|\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|.$

Επίσης, όπως είδαμε στον $\mathbb{R}^2$ ήδη, ισχύει γενικά η εξής:

Πρόταση 1.44: Έστω $\bar{x}_\nu = (x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathbb{N}$, και $\bar{x}_0 = (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$.
Τότε: $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \iff \forall i = 1, \dots, n \;\; x_\nu^{(i)} \to x_0^{(i)}$

Απόδειξη: Ισχύει (βλ. ισοδυναμία νορμών) $\|\underset{(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})}{\bar{x}}\|_\infty := \max\{|x^{(1)}|, \dots, |x^{(n)}|\} \le \|\bar{x}\| \le \sqrt{n}\|\bar{x}\|_\infty$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$ Από την (*) έχουμε $\forall \nu \in \mathbb{N}$

$|x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| \le \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|_\infty \le \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|$, $\forall i = 1, \dots, n$

$\Longrightarrow \;\; \forall i = 1, \dots, n \;\; |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| \to 0 \iff x_\nu^{(i)} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} x_0^{(i)}$

Θ. Παρμελετάκης

$\underset{\forall \varepsilon > 0}{\Longleftarrow}$ Έχουμε $\forall i = 1, \dots, n$: $x_\nu^{(i)} \longrightarrow x_0^{(i)}$

$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n \;\; \exists \nu_i \in \mathbb{N} \;\; \forall \nu \ge \nu_i \;\; |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n : \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \nu_0 = \max\{\nu_1, \dots, \nu_n\} \in \mathbb{N} \;\; \forall \nu \ge \nu_0 \;\; \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

$\underset{(*)}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall \nu \ge \nu_0 \;\; \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \varepsilon.$